PARAGRAAF 7.1 : LIJNEN EN HOEKEN

LES 1 LIJNEN

DEFINITIES

Je kunt een lijn op verschillende manieren bepalen / opschrijven :

(1) RC - manier $y = ax + b$
→ Handig als je de rc weet

(2) Lineaire combinatie : $ax + by = c$

→ Is een andere a dan bij versie (1)
→ Vaak makkelijk bij stelsel vergelijkingen oplossen

(3) Assenvergelijking $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

→ (p , 0) en (0 , q) zijn de snijpunten met de assen.

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de punten (0,4) en (6,0).

a. Stel de vergelijking op van deze lijn.
b. Schrijf deze lijn in de vorm $ax + by = c$. Met a, b en c gehele getallen.
c. Bepaal de vergelijking van de lijn in de vorm $y = ax + b$

OPLOSSING 1

a. $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$

b. Je kunt de eerste vergelijking ook schrijven als
$\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}y = 1$
Als je aan beide kanten met 24 (=4·6) vermenigvuldigd krijg je :
$24 \cdot \frac{1}{6}x + 24 \cdot \frac{1}{6}y = 24$
$4x + 6y = 24$

c. Schrijf de laatste vorm als $y =$:
$4x + 6y = 24$
$6y = -4x + 24$
$y = -\frac{4}{6}x + 4$

OPMERKING

Je had dit opgave c ook kunnen oplossen door de rc met twee punten uit te rekenen :
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-4}{6-0} = -\frac{4}{6}$ en vervolgens de b berekenen.

VOORBEELD 2

Gegeven zijn de lijnen $l :\ 2x + py = 10$ en $k :\ (p+5)x + 3y = q$

a. Voor welke waarde van p (en q) zijn de lijnen evenwijdig
b. Voor welke waarde van p (en q) zijn de lijnen gelijk.

Neem nu $p = 2$ en $q = 19$.

c. Los het stelsel op.

OPLOSSING 2

a. Evenwijdig betekent $rc_l = rc_k$

(1) rc_l berekenen :
$2x + py = 10$
$py = -2x + 10$
$y = \frac{-2}{p}x + \frac{10}{p}$

(2) rc_k berekenen :
$(p+5)x + 3y = q$
$3y = -(p+5)x + q$
$y = \frac{-p-5}{3}x + \frac{q}{3}$

(3) $rc_l = rc_k$:
$\frac{-2}{p} = \frac{-p-5}{3}$
$p(-p-5) = -2 \cdot 3$
$-p^2 - 5p = -6$
$p^2 + 5p = 6$
$p^2 + 5p - 6 = 0$
$(p-1)(p+6) = 0$
$p = 1 \ \ v \ \ p = -6$ (en q maakt niks uit)

b. Er zijn twee oplossingen voor p. bij elke oplossing moet je de bijbehorende q berekenen :

(1) Neem $p = 1$. Vul deze in in de vergelijkingen $2x + py = 10$ en $(p + 5)x + 3y = q$:

$2x + y = 10$ en $6x + 3y = q$ { Vermenigvuldig de eerste vergelijking met 3 }
$6x + 3y = 30$ en $6x + 3y = q$
Dus $q = 30$

(2) Neem $p = -6$. Vul deze in in de vergelijkingen $2x + py = 10$ en $(p + 5)x + 3y = q$:

$2x - 6y = 10$ en $-x + 3y = q$ { Vermenigvuldig de tweede vergelijking met -2 }
$2x - 6y = 10$ en $2x - 6y = -2q$
Deze zijn gelijk als $q = -5$

c. Neem $p = 2$ en $q = 19$ en vul deze in in de vergelijkingen $2x + py = 10$ en $(p + 5)x + 3y = q$:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 10 \\ 7x + 3y = 19 \end{cases} \begin{vmatrix} \times 3 \\ \times 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x + 6y = 30 \\ 14x + 6y = 38 \end{cases} -$$

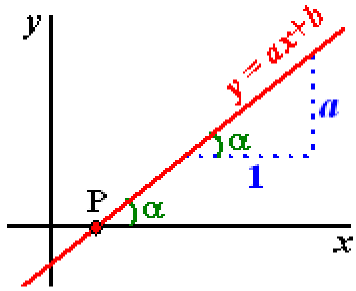
$$-8x = -8 \quad \rightarrow \; x = 1$$

Invullen in de eerste vergelijking geeft
$2 \cdot 1 + 2y = 10$
$2y = 8$
$y = 4$

Dus het snijpunt = $(1{,}4)$

LES 2 HOEK TUSSEN TWEE LIJNEN

DEFINITIE HOEKEN VAN LIJNEN

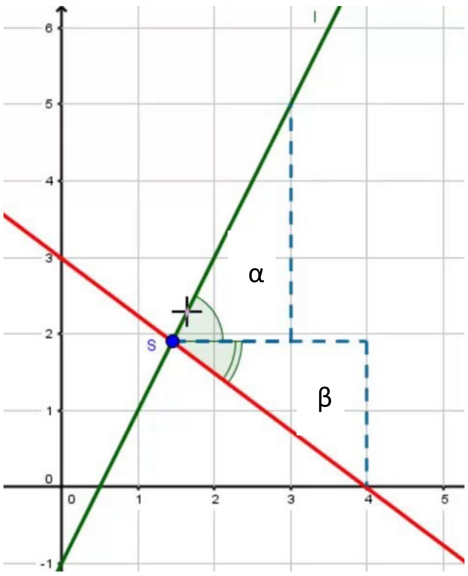


(1) Voor een hoek α van een lijn k en de x-as geldt :

$$tan\ (\alpha) = \frac{a}{1} = \frac{RC_k}{1} = rc_k$$

$$rc_k = tan\ (\alpha)$$

(2) Als je te maken hebt met twee lijnen, moet je rekenen met twee aparte hoeken :

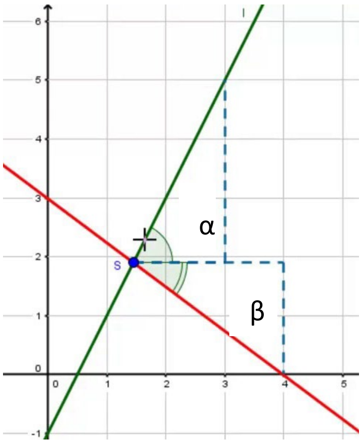


(3) Een hoek φ tussen de lijnen k en l geldt φ = α – β.

(4) Er geldt 0 ≤ φ ≤ 90

VOORBEELD 1

Bepaal de hoek tussen de lijnen $y = 2x - 1$ en $y = -\frac{3}{4}x + 3$. (Zie plaatje)



OPLOSSING 1

(1) Eerst α bereken :

$\tan(\alpha) = \frac{2}{1} = 2$

$\alpha = 63{,}4°$

(2) Dan β berekenen

$\tan(\beta) = -\frac{3}{4}$

$\beta = -36{,}8°$

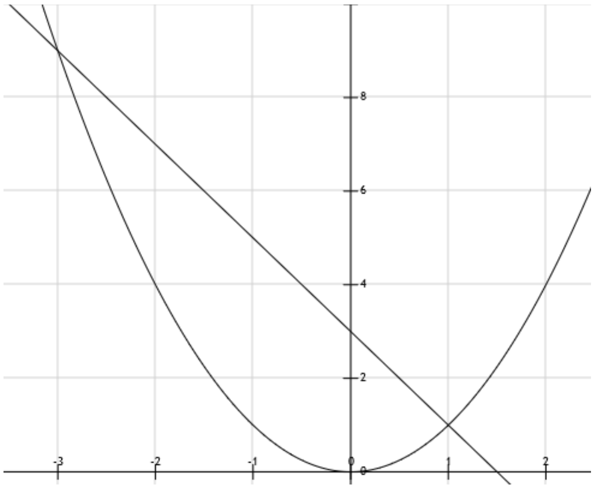
(3) $\varphi = \alpha - \beta = 63{,}4 - -36{,}8 = 100{,}3$

(4) Aangezien de hoek altijd kleiner is dan 90° moet je nog één stap uitvoeren :

$\angle(lijn\ k, lijn\ l) = 180 - 100{,}3 = 79{,}7$

VOORBEELD 2

Gegeven zijn de functies $f(x) = x^2$ en $g(x) = -2x + 3$.



De grafieken snijden elkaar in twee punten. We kijken alleen naar het snijpunt S met $x_S > 0$. Bereken algebraïsch de hoek tussen de grafieken in punt S. Rond af op één decimaal.

OPLOSSING 2

(1) Eerst het snijpunt berekenen :

$$x^2 = -2x + 3$$
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$(x+3)(x-1) = 0$$
$$x = -3 \ \ v \ \ v \ \ \ x = 1 \ (punt\ S)$$

(2) $f`(x) = 2x$

$RC = f`(1) = 2 \cdot 1 = 2$

$\tan(\alpha) = 2 \quad \rightarrow \alpha = 63{,}4°$

(3) $g'(x) = -2$

$RC = -2$

$\tan(\beta) = -2 \qquad \rightarrow \beta = -63{,}43..°$

(4) $\varphi = \alpha - \beta = 63{,}43.. - -\ 63{,}43.. = 126{,}9°$

(5) Omdat deze hoek groter is dan 90 graden, moet je nog een extra stap doen :

$\angle(lijn\ k, lijn\ l) = 180 - 126{,}9 = 53{,}1$

PARAGRAAF 7.2 : AFSTAND VAN PUNT TOT LIJN

LES 1 : AFSTAND PUNTEN

DEFINITIE AFSTANDEN

(1) $d(A,B)$ = { De afstand van punt A tot punt B }

(2) De afstand tussen de punten $A = (x_a, y_a)$ en $B = (x_b, y_b)$ kun je berekenen met de formule van Pythagoras :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

(3) Het midden van de punten A en B is $M = (\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2})$

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de punten $A = (3\,,5)$ en $B = (-1\,,7)$.

a. Bereken de afstand AB.

b. Bereken het midden M van AB.

OPLOSSING 1

a. De afstand $d(A,B) = \sqrt{(3--1)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

b. $M = (\frac{3+-1}{2}, \frac{5+7}{2}) = (1{,}6)$

VOORBEELD 2

Gegeven zijn de punten $A = (0\,,p)$ en $B = (p+1\,,7)$.

a. Druk het midden van AB uit in p

b. Druk de afstand tussen A en B uit in p en bereken wanneer deze afstand minimaal is.

OPLOSSING 2

a. $M = (\frac{x_a+x_b}{2}\,,\,\frac{y_a+y_b}{2}) = (\frac{0+p+1}{2}, \frac{p+7}{2}) = (\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}p+3\frac{1}{2})$

b. Eerst de formule voor de afstand bepalen :

(1) $\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{(p+1-0)^2+(7-p)^2} = \sqrt{p^2+2p+1+49-14p+p^2}}$

$\boldsymbol{d(A,B) = \sqrt{2p^2-12p+50}}$

(2) Noem deze $f(p) = \sqrt{2p^2-12p+50}$. Bepaal het minimum met de GR :

$Y_1 = \sqrt{2p^2-12p+50}$.

Calc minimum geeft $p = 3$.

LES 2 : LOODRECHTE LIJNEN

DEFINITIE LOODRECHTE LIJNEN

Twee lijnen k en m staan loodrecht op elkaar als $rc_k \times rc_m = -1$.

VOORBEELD 1

Gegeven zijn de punten $A = (3\,,5)$ en $B = (-1\,,7)$.

Lijn k staat loodrecht op de lijn AB en gaat door het punt M

Bepaal de vergelijking van lijn k.

OPLOSSING 1

$M = (\frac{3+-1}{2}, \frac{5+7}{2}) = (1{,}6)$

(1) $rc_{AB} = \frac{7-5}{-1-3} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

(2) $rc_{AB} \times rc_M = -1 \;\rightarrow\; -\frac{1}{2} \times rc_M = -1 \;\rightarrow\; rc_M = 2$

(3) $M = (1{,}6)$ ligt op de lijn

$$y = 2x + b$$
$$6 = 2 \cdot 1 + b$$
$$b = 4$$

(4) $y = 2x + 4$

LES 3 : AFSTAND PUNT - LIJN

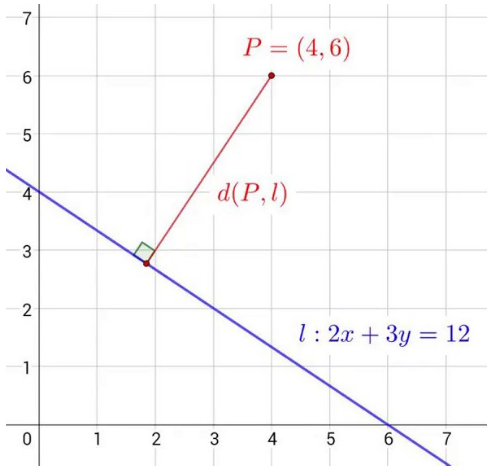
DEFINITIE

(1) $d(P, l)$ = { De afstand van punt P tot lijn l }

(2) In het plaatje hiernaast is $d(P, l) = PQ$

(3) Lijn PQ staat loodrecht op lijn l.

Dus $rc_l \times rc_{PQ} = -1$



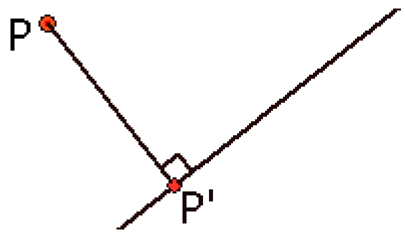
Q

VOORBEELD 1 (BOEK BLZ 157)

Gegeven is de lijn k : $3x + 2y = 12$. Lijn *l* staat loodrecht op lijn k en gaat door het punt $P = (5, 5)$.

a. Bepaal de vergelijking van lijn *l*.

b. Bepaal de afstand van P tot lijn k.



OPLOSSING 1

a. Schrijf de lijn eerst in de vorm $y = \ldots$:

$$3x + 2y = 12$$
$$2y = -3x + 12$$
$$y = -1\tfrac{1}{2}x + 6$$

(1) $\mathrm{rc_k} = -1\frac{1}{2}$

(2) $rc_{PB} \times rc_M = -1$

$-1\frac{1}{2} \times rc_M = -1$

$rc_M = \frac{2}{3}$

(3) $P = (5, 5)$ ligt op de lijn

$$y = \frac{2}{3}x + b$$
$$5 = \frac{2}{3} \cdot 5 + b$$
$$b = 5 - \frac{10}{3} = \frac{15}{3} - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

(4) $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$

b. Bereken eerst het snijpunt P’ van de lijnen k en l.

(1) Vul $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ in in de vergelijking $3x + 2y = 12$

$3x + 2\left(\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}\right) = 12$

$3x + \frac{4}{3}x + \frac{10}{3} = 12 \quad (\times 3)$

$9x + 4x + 10 = 36$

$13x = 26$

$x = 2 \qquad \rightarrow y = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} = 3$

Dus het snijpunt is $S = (2,3)$

(2) De afstand $d(P,k) = d(P,P') = \sqrt{(5-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

OPMERKING

Als lijn $k : ax + by = c$ dan is

(1) De richtingsvector van de loodrechte lijn *l* is $\binom{b}{-a}$

(2) Lijn *l* : $bx - ay = c$

(3) Je kunt de c berekenen door punt P in te vullen

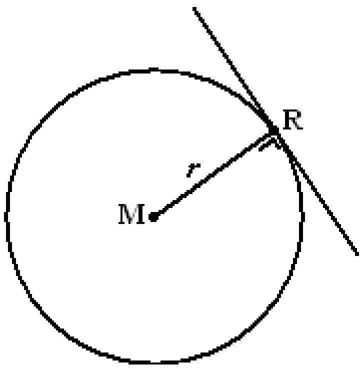
PARAGRAAF 7.3 CIRKELVERGELIJKINGEN

DEFINITIE

(1) Voor een cirkel met middelpunt (p, q) geldt de vergelijking :

$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

(2) De straal staat altijd loodrecht op de raaklijn aan de cirkel.



VOORBEELD 1

De lijn $k:\ y = 2x + 2$ raakt de cirkel met middelpunt $(4{,}5)$. Bepaal de vergelijking van de cirkel.

OPLOSSING 1

- We moeten eerst de vergelijking van MR bepalen.
- Vervolgens kunnen we de straal berekenen en de vergelijking opstellen.

(1) $rc_k \times rc_{RM} = 2 \times rc_{RM} = -1$

$rc_{RM} = -½$

Dus de vergelijking van lijn MR is $y = -½x + b$ (loodrecht op lijn k !!)

(2) Lijn MR gaat door $M = (4{,}5)$. Dus : $5 = -½ \cdot 4 + b$

$b = 7$

(3) Snijpunt MR en lijn k :

$-½x + 7 = 2x + 2$

$-2\,½x = -5$

$x = 2$ $\rightarrow y = 2 \cdot 2 + 2 = 6$ $\rightarrow R = (2{,}6)$

(4) $r = \sqrt{(4-2)^2 + (5-6)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

(5) Voor cirkel geldt de vergelijking : $(x-4)^2+(y-5)^2=(\sqrt{5})^2 \quad \rightarrow \quad (x-4)^2+(y-5)^2=5$

VOORBEELD 2

Gegeven $x^2 + 12x + y^2 + 20 = 0$.

a. Bereken de coördinaten van het middelpunt en de bijbehorende straal.

Gegeven het punt $A = (1,2)$

b. Ligt punt A binnen of buiten de cirkel

c. Bereken de afstand van $A = (1,2)$ tot de cirkel.

OPLOSSING 2

a. Omdat $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$ geldt

(1) $(x+6)^2 - 36 + y^2 + 20 = 0$

(2) $(x+6)^2 + y^2 = 36 - 20$

$(x+6)^2 + y^2 = 16 = 4^2$

(3) Middelpunt M = (-6,0) en r = 4

b. De afstand $d(A, M) = \sqrt{(1 - -6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$

Omdat $\sqrt{53} > 4$ ligt A buiten de cirkel

c. Afstand tot de cirkel = $\sqrt{53} - 4$

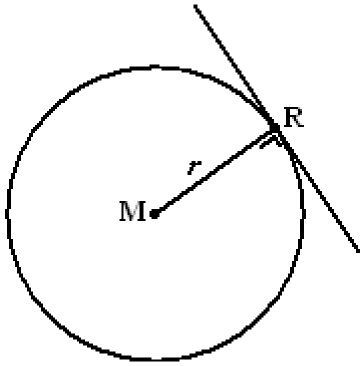
PARAGRAAF 7.4 RAAKLIJN EN SNIJPUNTEN BIJ CIRKEL

LES 1 : RAAKLIJN AAN CIRKEL OPSTELLEN

VOORBEELD 1

Punt R = (3 , 6) ligt op de cirkel $(x-4)^2+(y-5)^2=5$

Stel een vergelijking op van de raaklijn k in punt R.



OPLOSSING 1

We moeten eerst de rc van lijn r weten en dan is het herhaling :

(1) Middelpunt $M = (4{,}5)$.

(2) $rc_r = \frac{6-5}{3-4} = \frac{1}{-1} = -1.$

(3) $rc_r \times rc_k = -1 \;\rightarrow\; -1 \times rc_k = -1 \;\rightarrow\; rc_k = 1$

(4) Vergelijking lijn k is $y = 1 \cdot x + b \rightarrow y = x + b$

(5) Lijn gaat door $R = (3\,,6)$ dus : $6 = 3 + b \rightarrow b = 3$

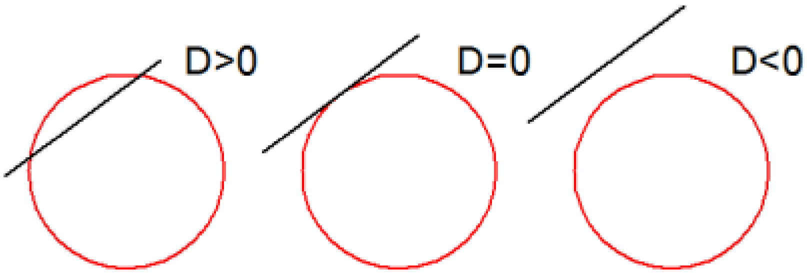
(6) Lijn $k :\; y = x + 3$

LES 2 : SNIJPUNTEN VAN LIJN EN CIRKEL

DEFINITIE

Als een lijn $y = ax + b$ en de cirkel $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ elkaar snijden dan kunnen er:

(1) Twee snijpunten zijn $\rightarrow D > 0$
(2) Eén snijpunt zijn $\rightarrow D = 0$
(3) Geen snijpunt zijn $\rightarrow D < 0$



VOORBEELD 1

Gegeven is de cirkelvergelijking $(x+6)^2+y^2=16$ en de lijn k met vergelijking $y = ax + 1$.

a. Neem $a = 1$. Bereken de x-coördinaten van de snijpunten van lijn k en de cirkel.

b. Voor exact welke a de lijn $y = ax + 1$ de raaklijn is.

OPLOSSING 1

a. Vul $y = x + 1$ in in $(x+6)^2+y^2=16$. Dit geeft :

$$(x+6)^2+(x+1)^2=16$$

$$x^2 + 12x + 36 + x^2 + 2x + 1 = 16$$

$$2x^2 + 14x + 21 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{14^2 - 4 \cdot 2 \cdot 21}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 168}}{4}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 168}}{4}$$

$$x = \frac{-14 + \sqrt{28}}{4} \quad v \quad x = \frac{-14 - \sqrt{28}}{4}$$

b. Vul $y = ax + 1$ in in $(x+6)^2+y^2=16$. Dit geeft :

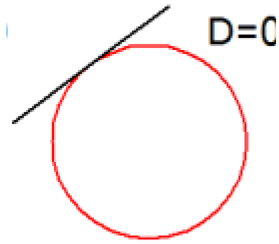
(1) Vul $y = ax + 1$ in :

$$(x+6)^2+(ax+1)^2=16$$

$$x^2 + 12x + 36 + a^2x^2 + 2ax + 1 = 16$$

$$(a^2 + 1)x^2 + (12 + 2a)x + 21 = 0$$

(2) Deze raakt de cirkel als de D gelijk is aan nul :



$$D = (12 + 2a)^2 - 4(a^2 + 1) \cdot 21$$

$$D = 4a^2 + 48a + 144 - 84a^2 - 84 = 0$$

$$D = -80a^2 + 48a + 60 = 0$$

(3) Oplossen met abc-formule

$$D = 48^2 - 4 \cdot -80 \cdot 60 = 21504$$

$$a = \frac{-48+\sqrt{21504}}{-160} \quad v \quad a = \frac{-48-\sqrt{21504}}{-160}$$